Funktionen, Grenzwerte und Stetigkeit

5

Was ist eine reelle Funktion?

Wie lautet das grundlegende Konzept des Grenzwertbegriffs bei Funktionen?

Was zeichnet stetige Funktionen aus?

Teil II

L. Göllmann et al., *Mathematik für Ingenieure: Verstehen – Rechnen – Anwenden*, DOI 10.1007/978-3-662-53867-8_5

Im vorausgegangenen Kapitel haben wir uns mit Folgen reeller Zahlen, deren Reihen und Konvergenzeigenschaften beschäftigt. Ziel dieses Kapitels ist eine Erweiterung des Grenzwertbegriffs auf Funktionen. Während eine Folge aus einer Sequenz abzählbarer Werte besteht, die von einer natürlichen Zahl n abhängen, stellt eine Funktion einen kontinuierlichen Durchlauf von Werten in Abhängigkeit einer reellen Zahl x dar. Wir werden auf Grundlage des Grenzwertbegriffs für Folgen die Konvergenz einer Funktion definieren und einen entsprechenden Grenzwert einführen. Eng verbunden mit dem Grenzwertbegriff für Funktionen ist die Stetigkeit.

5.1 Funktionen einer reellen Variablen

Definition: Funktion

Eine Abbildung von einer Teilmenge $D \subset \mathbb{R}$ reeller Zahlen in die reellen Zahlen

$$\begin{aligned} f : D &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

heißt (reellwertige) Funktion auf D. Die Menge D wird als **Definitionsmenge**, die Menge aller Funktionswerte

$$f(D) := \{f(x) \mid x \in D\}$$

als **Wertemenge** von f oder Bild von D unter f bezeichnet. Wir können die Definition ausdehnen auf Abbildungen einer Teilmenge $D \subset \mathbb{R}$ reeller Zahlen in die Menge der komplexen Zahlen. So bezeichnen wir

$$\begin{aligned} f : D &\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto f(x) = a(x) + \mathrm{i}b(x) \end{aligned}$$

mit zwei reellwertigen Funktionen a und b als komplexwertige Funktion einer reellen Variablen.

Die Kombination aus x-Wert und zugehörigem Funktionswert $y = f(x)$ mit $x \in D$ kann als Paar zur Beschreibung eines Punktes in $\mathbb{R}^2$ aufgefasst werden. Dies motiviert die Darstellung des Werteverlaufs einer Funktion in einem zweidimensionalen Koordinatensystem.

Definition: Graph

Als Graph einer Funktion

$$\begin{aligned} f : D &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

bezeichnen wir die Teilmenge

$$\Gamma_f := \{(x, f(x)) \mid x \in D\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Sind $a(x)$ und $b(x)$ zwei reellwertige Funktionen einer reellen Variablen $x \in D$, so ist $f(x) = a(x) + \mathrm{i}b(x)$ eine komplexwertige Funktion der reellen Variablen x. Eine derartige Funktion können wir uns in einem dreidimensionalen Koordinatensystem grafisch veranschaulichen. Hierzu benötigen wir neben der x-Achse zwei weitere, senkrecht aufeinander stehende Achsen, auf denen wir für jedes x der Definitionsmenge D den Realteil $a(x)$ und den Imaginärteil $b(x)$ von $f(x)$ als Punkt eintragen. Diese beiden Achsen bilden somit die reelle und die imaginäre Achse der gaußschen Zahlenebene. Die x-Achse würde dann als dritte Achse senkrecht auf dieser Ebene stehen.

Ein berühmtes Beispiel einer komplexwertigen Funktion einer reellen Variablen ist die imaginäre Exponentialfunktion

$$\begin{aligned} \exp : \mathbb{R} &\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto \exp(\mathrm{i}x) = \cos x + \mathrm{i} \sin x. \end{aligned}$$

Wenn wir nun für alle $x \in \mathbb{R}$ den Realteil $\cos x$ und den Imaginärteil $\sin x$ in der gaußschen Zahlenebene eintragen, so ergibt sich, wie wir im vorhergehenden Kapitel bereits festgestellt haben, der Einheitskreis in der komplexen Ebene $\mathbb{C}$, der sich im dreidimensionalen Koordinatensystem dann als Spirallinie darstellt.

Wir schreiben auch kürzer $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ statt $\exp(\mathrm{i}x)$. Wegen der Parität der Sinus- und Kosinusfunktion, $\cos(-x) = \cos x$ bzw. $\sin(-x) = -\sin x$, gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}) &= \tfrac{1}{2\mathrm{i}}(\cos x + \mathrm{i}\sin x - \cos(-x) - \mathrm{i}\sin(-x)) \\ &= \tfrac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{i}\sin x + \mathrm{i}\sin(x)) = \sin x, \\ \tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}) &= \tfrac{1}{2}(\cos x + \mathrm{i}\sin x + \cos(-x) + \mathrm{i}\sin(-x)) \\ &= \tfrac{1}{2}(\cos x + \cos(x)) = \cos x. \end{aligned}$$

Das Umschreiben der Sinus- und Kosinusfunktion mithilfe der imaginären Exponentialfunktion $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ bietet gelegentlich rechentechnische Vorteile. Wird die imaginäre Einheit in diesen Formeln weggelassen, so ergeben sich zwei weitere Funktionen.

Definition: Hyperbolicus-Funktionen

Für $x \in \mathbb{R}$ definieren wir den **Sinus Hyperbolicus** durch

$$\sinh x := \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x})$$

und den **Kosinus Hyperbolicus** durch

$$\cosh x := \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}).$$

Setzen wir in die Hyperbolicus-Funktionen statt x das imaginäre Argument $\mathrm{i}x$ für reelles x ein, so ergibt sich ein Zusammenhang zur Sinus- und Kosinusfunktion:

$$\begin{aligned} \sinh(\mathrm{i}x) &= \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}) = \mathrm{i}\sin x, \\ \cosh(\mathrm{i}x) &= \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}) = \cos x. \end{aligned}$$

5.2 Grenzwerte bei Funktionen und der Stetigkeitsbegriff

Basierend auf dem Grenzwertbegriff für Folgen werden wir nun einen geeigneten Grenzwertbegriff für Funktionen entwickeln. Uns interessiert dabei nicht nur das „Langfristverhalten" einer Funktion für $x \to \infty$, sondern auch das Verhalten einer Funktion, wenn $x \to a$ läuft. Hierbei ist $a \in \mathbb{R}$ nicht unbedingt eine Zahl aus dem Definitionsbereich der betrachteten Funktion. Sie muss sich nur beliebig genau durch x-Werte aus dem Definitionsbereich D der betrachteten Funktion annähern lassen. Präziser formuliert: a muss sich als Grenzwert einer D-wertigen Folge darstellen lassen.

Definition: Grenzwert bei einer Funktion

Es sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion auf einer Menge $D \subset \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl, für die es mindestens eine D-wertige Folge (a_n) gibt, die a als Grenzwert besitzt, d. h. $a_n \in D$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Falls sich für jede D-wertige Folge a_n mit Grenzwert a stets derselbe Grenzwert c bei der Auswertungsfolge $f(a_n)$

$$c := \lim_{n\to\infty} f(a_n)$$

ergibt, bezeichnet man die Zahl c als Grenzwert der Funktion f für x gegen a und schreibt

$$\lim_{x\to a} f(x) = c \qquad \text{oder} \qquad f(x) \overset{x\to a}{\longrightarrow} c.$$

Falls es jedoch mindestens zwei D-wertige Folgen a_n und a'_n mit gleichem Grenzwert $\lim a_n = a = \lim a'_n$ gibt, die aber verschiedene Grenzwerte ihrer Auswertungsfolgen $\lim f(a_n) \neq \lim f(a'_n)$ haben, existiert der o. g. Funktionsgrenzwert für $x \to a$ nicht. Der Grenzwert von $f(x)$ für $x \to a$ existiert also genau dann, wenn sich stets derselbe Grenzwert für die Auswertungsfolge $f(a_n)$ ergibt, unabhängig davon, wie a_n sich a nähert.

In dieser Definition wird nicht vorausgesetzt, dass f in a definiert sein muss, sondern dass es mindestens eine D-wertige Folge gibt, die gegen a konvergiert. Dies ist immer dann der Fall, wenn $a \in D$ ist. Falls $a \notin D$ ist dies nur dann möglich, wenn a ein **Berührpunkt** von D ist, d. h., wenn $\inf\{|a-d| \mid d \in D\} = 0$. Es ist beispielsweise $a = 2$ ein Berührpunkt von $D = [0, 2)$.

Der Grenzwert einer Funktion ist also definiert als

$$\lim_{x\to a} f(x) := \lim_{n\to\infty} f(a_n),$$

wenn für jede Folge $a_n \in D$ mit $a_n \overset{n\to\infty}{\to} a$ sich immer dieser Wert bei der jeweiligen Auswertungsfolge $f(a_n)$ ergibt.

Kann man sich überhaupt eine Situation vorstellen, in der ein Funktionsgrenzwert nicht existiert? Betrachten wir hierzu die Funktion $f(x) = 0^{|x|}$. Wir hatten schon zu früheren Zeiten $0^0 = 1$ gesetzt und $0^x = 0$ für $x \neq 0$. Diese Funktion hat in 0 keinen Grenzwert. Betrachten wir die Nullfolgen $a_n = 1/n$ und $a'_n = 0$, so stellen wir fest, dass sie zwar gegen denselben Grenzwert $a = 0$ konvergieren, ihre Auswertungsfolgen aber unterschiedliche Grenzwerte besitzen:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 = 0 = \lim_{n\to\infty} a'_n,$$
$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = 0^{\frac{1}{n}} = 0 \neq 1 = 0^0 = \lim_{n\to\infty} f(a'_n).$$

Ein weiteres Beispiel stellt die Kehrwertfunktion $f(x) = \frac{1}{x}$ dar. Sie besitzt in $a = 0$ keinen Grenzwert. So haben die $\mathbb{R}^*$-wertigen Folgen $a_n = 1/n$ und $a'_n = -1/n$ beide den Grenzwert $a = 0$, für ihre Auswertungsfolgen gilt jedoch:

$$f(a_n) = \frac{1}{a_n} = \frac{1}{1/n} = n \longrightarrow \infty,$$
$$f(a'_n) = \frac{1}{a'_n} = \frac{1}{-1/n} = -n \longrightarrow -\infty.$$

Im Gegensatz zur Kehrwertfunktion liegt bei $g(x) = \frac{1}{x^2}$ für $x \to 0$ zumindest die bestimmte Divergenz gegen ∞ vor:

$$g(a_n) = \frac{1}{a_n} = \frac{1}{(1/n)^2} = n^2 \longrightarrow \infty,$$
$$g(a'_n) = \frac{1}{a'_n} = \frac{1}{(-1/n)^2} = n^2 \longrightarrow \infty.$$

Hier können wir schreiben:

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \infty.$$

Einseitige Grenzwerte sind eine Abschwächung des Grenzwertbegriffs

In Situationen, in denen ein Grenzwert einer Funktion an einer Stelle a nicht existiert, gibt es oftmals die Möglichkeit, sich nur von einer Seite der Stelle zu nähern, also nur Folgen a_n zuzulassen, für die entweder $a_n < a$ oder $a_n > a$ gilt. Mit dieser Abschwächung können wir den Grenzwertbegriff auf die einseitigen Grenzwerte erweitern.

Einseitige Grenzwerte

- Man schreibt

$$\lim_{x\searrow a} f(x) \quad \text{oder} \quad \lim_{x\to a^+} f(x),$$

falls in der vorausgegangenen Definition nur D-wertige Folgen betrachtet werden, deren Folgenglieder $a_n > a$ sind. In diesem Fall nähert man sich dem Wert a also von oben bzw. von rechts und spricht vom rechtsseitigen Grenzwert von f für x gegen a.

- Man schreibt

$$\lim_{x \nearrow a} f(x) \quad \text{oder} \quad \lim_{x \to a^-} f(x),$$

falls in der vorausgegangenen Definition nur D-wertige Folgen betrachtet werden, deren Folgenglieder $a_n < a$ sind. In diesem Fall nähert man sich dem Wert a von unten bzw. von links und spricht vom linksseitigen Grenzwert von f für x gegen a.
- Man schreibt

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x \to \infty} f(x),$$

falls in der vorausgegangenen Definition nur D-wertige Folgen betrachtet werden, die bestimmt divergent gegen $-\infty$ bzw. gegen ∞ sind.

Gelegentlich findet man die Kurzschreibweisen

$$f(a^-) := \lim_{x \to a^-} f(x) \qquad \text{bzw.} \qquad f(a^+) := \lim_{x \to a^+} f(x).$$

Wir betrachten zum näheren Verständis des Grenzwertbegriffs bei Funktionen einige spezielle Standardsituationen.

Beispiele

1. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x} = 0$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = \infty$
3. $\lim\limits_{x \searrow 0} \dfrac{1}{x} = \infty$, aber $\lim\limits_{x \nearrow 0} \dfrac{1}{x} = -\infty$. Hier sind demnach rechts- und linksseitiger „Grenzwert" verschieden, daher existiert der Grenzwert von $f(x) = \frac{1}{x}$ für x gegen 0 nicht.
4. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{x+1} = 1 = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x+1}{x}$. In beiden Fällen ist der Grenzwert 1. Die erste Funktion nähert sich diesem Wert von unten, da $\frac{x}{x+1} < 1$ ist für $x > -1$, während sich die zweite Funktion der 1 von oben nähert, denn es ist $\frac{x+1}{x} > 1$ für $x > 0$. Gelegentlich drückt man dies durch ein hochgestelltes Minuszeichen $(-)$ bzw. Pluszeichen $(+)$ aus:

$$\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1} \overset{x \to \infty}{\longrightarrow} 1^-,$$
$$\frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x} \overset{x \to \infty}{\longrightarrow} 1^+.$$

◀

Stetigkeit bedeutet Vertauschbarkeit von Grenzwertbildung und Funktionsauswertung

Eng verknüpft mit dem Grenzwertbegriff bei Funktionen ist der Begriff der Stetigkeit.

Definition: Stetigkeit

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt stetig in $a \in D$, falls der Grenzwert von f für x gegen a existiert, d. h.

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) = f(\lim_{x \to a} x).$$

Die Grenzwertbildung ist also im Fall der Stetigkeit mit der Funktionswertbildung vertauschbar. Aufgrund der Stetigkeit ist es erlaubt, das lim-Symbol in die Funktion hineinzuziehen. Wenn f in a nicht stetig ist, nennt man a Unstetigkeitsstelle von f.

Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt stetig (in oder auf der Menge D), falls f in jedem $a \in D$ stetig ist. Eine komplexwertige Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ einer reellen Variablen mit $f(x) = a(x) + ib(x)$ und $a(x), b(x) \in \mathbb{R}$ für alle $x \in D \subset \mathbb{R}$ heißt stetig (auf D), wenn ihr Realteil $a(x)$ und ihr Imaginärteil $b(x)$ stetige Funktionen (auf D) sind.

Achtung Einige Autoren definieren den Grenzwertbegriff bei Funktionen etwas anders. Man beschränkt sich auf Folgen, die zwar gegen a konvergieren, den Wert a aber niemals annehmen. Mit dieser gegenüber unserer Definition abgeschwächten Voraussetzung existiert der Grenzwert einer Funktion auch in Situationen, wenn

$$f(a) \neq \lim_{n \to \infty} f(a_n)$$

gilt für alle Folgen $a_n \to a$ mit $a_n \neq a$. Dies hat eine modifizierte Definition der Stetigkeit zur Folge. Es muss dann für die Stetigkeit von f in a gefordert werden, dass der Grenzwert von f für x gegen a mit dem Funktionswert übereinstimmt:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Mit dieser abgeschwächten Grenzwertdefinition existiert zwar der Grenzwert der Funktion $0^{|x|}$ für $x \to 0$ mit dem Wert 0. Da aber $0^{|0|} = 1 \neq 0$ ist, ist auch mit dieser alternativen Definition $0^{|x|}$ nicht stetig in $x = 0$. ◀

Häufig betrachtet man nicht nur einzelne stetige Funktionen, sondern eine Menge stetiger Funktionen. Dabei ist die folgende Notation hilfreich.

Definition

Die Menge aller auf $D \subset \mathbb{R}$ definierten stetigen Funktionen wird mit $C^0(D)$ oder $C(D)$ bezeichnet.

Bevor wir einige Beispiele stetiger Funktionen betrachten, sehen wir uns Funktionen mit Unstetigkeitsstellen an:

1. Die Heaviside-Funktion $H(t-a)$ mit $a \in R$ hat die Unstetigkeitsstelle a, ist aber in $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ stetig.
2. Die Funktion $0^{|x|}$ ist außer in $x = 0$ überall stetig.
3. Die Gauß-Klammerfunktion $\lfloor x \rfloor$ hat unendlich viele Unstetigkeitsstellen $x_k = k$ für $k \in \mathbb{Z}$. In $x \notin \mathbb{Z}$ ist dagegen $\lfloor x \rfloor$ stetig (s. Abb. 2.64).

Betrachten wir nun Beispiele bzw. ganze Klassen stetiger Funktionen:

Beispiel

1. Alle Polynome $p \in \mathbb{R}[x]$ sind als Funktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto p(x)$ (auf $\mathbb{R}$) stetig.
2. Alle gebrochenrationalen Ausdrücke $r = p/q$ mit $p, q \in \mathbb{R}[x]$ sind (auf ihren Definitionsmengen) stetig.
3. Die Exponentialfunktion exp ist (auf ganz $\mathbb{R}$) stetig.
4. Die trigonometrischen Funktionen sin und cos sind (auf ganz $\mathbb{R}$) stetig.
5. Die Tangensfunktion tan ist (auf ihrer Definitionsmenge) stetig. ◀

Da die Stetigkeitseigenschaft ein Begriff ist, der nur für x-Werte der Definitionsmenge sinnvoll ist, erübrigt es sich, dies bei den obigen Beispielen nochmals zu erwähnen. So kann beispielsweise auch kurz gesagt werden: „Der Tangens ist stetig".

Die Stetigkeit dieser Funktionen und Funktionsklassen ergibt sich aus den folgenden Sätzen. Zunächst wollen wir definieren, was unter einer zusammengesetzten Funktion zu verstehen ist.

Definition: Komposition

Es seien $D, E \subset \mathbb{R}$ Teilmengen reeller Zahlen, $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : E \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $f(D) \subset E$. Die Werte von f sollen also sämtlich im Definitionsbereich von g liegen. Dann bezeichnet man mit

$$\begin{aligned} g \circ f : D &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto g(f(x)) \end{aligned}$$

die aus f und g durch Hintereinanderausführung zusammengesetzte Funktion. Man nennt $g \circ f$ die Komposition oder Verkettung g nach f.

Man kann zeigen, dass sich die Stetigkeit einzelner Funktionsbestandteile bei deren Hintereinanderausführung auf die Komposition überträgt.

Satz

Für zwei stetige Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : E \to \mathbb{R}$ auf den Mengen $D, E \subset \mathbb{R}$ mit $f(D) \subset E$ ist die Komposition $g \circ f$ eine stetige Funktion auf D.

Beispiel

Wir betrachten die Funktionen

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_+ \quad &\text{und}\quad g : \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto x^2 + 1 & x &\mapsto \frac{1}{\sqrt{x}} . \end{aligned}$$

Die Verkettung

$$\begin{aligned} g \circ f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto g(f(x)) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \end{aligned}$$

ist eine auf ganz $\mathbb{R}$ stetige Funktion. ◀

Verkettungen stetiger Funktionen sind also wieder stetig. Ebenso verhält es sich mit Summe, Produkt und Kehrwert bzw. Quotient stetiger Funktionen.

Satz

Es seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen auf der Menge $D \subset \mathbb{R}$. Dann sind sowohl $f + g : D \to \mathbb{R}$, definiert durch $x \mapsto f(x) + g(x)$, als auch $fg : D \to \mathbb{R}$, definiert durch $x \mapsto f(x)g(x)$, stetig auf D. Für $a \in D$ mit $g(a) \neq 0$ ist auch der Quotient f/g definiert durch $x \mapsto f(x)/g(x)$ stetig in a.

Dieser Satz macht insbesondere deutlich, dass bezüglich der Addition zweier Funktionen und der skalaren Multiplikation einer Funktion mit einer reellen Konstanten die Menge $C(D)$ der stetigen Funktionen auf einer Menge $D \subset \mathbb{R}$ einen $\mathbb{R}$-Vektorraum, einer in der linearen Algebra wichtigen Struktur, bildet. Allgemeine reelle oder komplexe Vektorräume werden in Kap. 11 behandelt. Stetige Funktionen zeichnen sich durch einen Graphen aus, der auf zusammenhängenden Bereichen, also Intervallen, der Definitionsmenge eine zusammenhängende Kurve aufweist. Die bereits zuvor genannte Funktion $0^{|x|}$ ist in $x = 0$ nicht stetig, da dort der Grenzwert gemäß unserer Definition nicht existiert. Der Graph ist auf der zusammenhängenden Menge $D = \mathbb{R}$ keine zusammenhängende Kurve. Es tritt bei $x = 0$ ein Sprung von 0 auf 1 auf. Die Kehrwertfunktion $\frac{1}{x}$ ist stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Zwar ist der Graph keine zusammenhängende Kurve auf dem nicht zusammenhängenden Definitionsbereich $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, aber auf den beiden zusammenhängenden Teilmengen des Definitionsbereichs $\mathbb{R}_- = (-\infty, 0)$ und $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ ist der Graph jeweils eine zusammenhängende Kurve.

Stetigkeit hat in Anwendungssituationen den Vorteil, dass hinreichend geringe Abweichungen in den x-Werten um eine Stetigkeitsstelle a auch nur zu beliebig geringen Abweichungen in den Funktionswerten $f(x)$ um den Funktionswert $f(a)$ führen und keine sprunghaften Wechsel auftreten. Dies kann durch die ε-δ-Definition der Stetigkeit präzisiert werden.

ε-δ-Definition der Stetigkeit

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ auf $D \subset \mathbb{R}$ ist genau dann stetig in $a \in D$, wenn es zu jeder Maximalabweichung $\varepsilon > 0$ in den Funktionswerten $f(x)$ von $f(a)$ eine Abweichung $\delta >$

0 von a in den x-Werten, also ein Intervall $(a-\delta, a+\delta)$, gibt mit

$$|f(x)-f(a)| < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad x \in (a-\delta, a+\delta)$$

oder, anders formuliert,

$$f(x) \in \big(f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon\big) \quad \text{für alle} \quad x \in (a-\delta, a+\delta)$$

für $\delta > 0$ hinreichend klein.

Man bezeichnet das Intervall $(a-\delta, a+\delta)$ als δ-Umgebung von a und das Intervall $(f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon)$ als ε-Umgebung von $f(a)$. Wann ist die Stetigkeit ein Vorteil in konkreten naturwissenschaftlich-technischen Anwendungen? Wenn wir für ein Problem eine Lösung $f(a)$ ermittelt haben und uns dabei die Stetigkeit von f in a bekannt ist, so können wir davon ausgehen, dass für geringe Abweichungen vom Parameter a, die beispielsweise durch gestörte Messdaten $a \pm \Delta a$ bedingt sein können, die Lösung $f(a \pm \Delta a)$ des abweichenden Problems sich nicht sprunghaft von der Lösung $f(a)$ des zuvor untersuchten exakten Problems entfernt. Kurz: Ein Schwanken der Enddaten kann durch ein hinreichend kleines Schwanken in den Ausgangsdaten innerhalb einer beliebig kleinen Toleranzschwelle eingegrenzt werden.

Stetige Funktionen haben besondere Eigenschaften

Eine stetige Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ zeichnet sich dadurch aus, dass ihr Graph auf Intervallen $I \subset D$ der Definitionsmenge D über keine Sprünge verfügt und daher zusammenhängend ist. Insbesondere ist damit sichergestellt, dass $f(I) := \{f(x) \,|\, x \in I\}$ wieder ein Intervall ist. Intervalle werden also durch stetige Funktionen allenfalls verzerrt, nicht jedoch auseinandergerissen.

Anschaulich klar ist daher der folgende Satz.

Nullstellensatz

Jede stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit vorzeichenverschiedenen Randwerten, d. h. $f(a)f(b) < 0$, besitzt eine Nullstelle ξ im offenen Intervall (a,b).

Auch wenn dieser Satz anschaulich klar ist, so ist für dessen Gültigkeit eine zentrale Eigenschaft reeller Zahlen, nämlich ihre Vollständigkeit, von entscheidender Bedeutung.

Wir können diesen Satz zeigen, indem wir zwei Cauchy-Folgen konstruieren, die gegen eine (und dieselbe) Nullstelle von f konvergieren oder für die bereits eine der beiden Folgen irgendwann eine Nullstelle wertemäßig annimmt. Die beiden Cauchy-Folgen stellen dabei die Unter- und Obergrenzen eines immer kleiner werdenden Intervalls dar.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit betrachten wir die Situation $f(a) < 0 < f(b)$. Der Fall $f(b) < 0 < f(a)$ lässt sich ganz analog abhandeln. Wir beginnen mit dem Intervall $[a,b]$ und definieren $a_0 := a$ sowie $b_0 = b$.

Im ersten Schritt halbieren wir zunächst das Intervall $I_0 = [a_0, b_0]$ mit dem Mittelpunkt $m_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$:

$$I_0 = [a_0, m_0] \cup [m_0, b_0].$$

Ist nun $f(m_0) = 0$, so haben wir mit m_0 bereits eine Nullstelle gefunden. Ansonsten müssen wir nur zwei Fälle unterscheiden:

1. Gilt $f(m_0) > 0$, so wählen wir zwei neue Intervallgrenzen: $a_1 := a_0$, $b_1 = m_0$.
2. Gilt $f(m_0) < 0$, so betrachten wir die neuen Intervallgrenzen $a_1 = m_0$ und $b_1 = b_0$.

In beiden Fällen erhalten wir ein Intervall $I_1 = [a_1, b_1]$ mit $f(a_1) < 0 < f(b_1)$, das gegenüber I_0 nur noch die halbe Länge $l_1 = \frac{1}{2}(b-a)$ besitzt. Wir zerlegen nun I_1 auf die gleiche Weise in zwei gleich lange Teilintervalle und überprüfen für den Mittelpunkt $m_1 := \frac{a_1+b_1}{2}$, ob $f(m_1) = 0$ gilt, womit m_1 bereits Nullstelle von f wäre, oder ob $f(m_1) > 0$ bzw. $f(m_1) < 0$ gilt. Im ersten Fall wählen wir zur Definition eines Folgeintervalls $I_2 = [a_2, b_2] := [a_1, m_1]$ die untere Hälfte, während im zweiten Fall die obere Hälfte von I_1 das nächste Intervall definiert mit $I_2 = [a_2, b_2] := [m_1, b_1]$. Dieses Verfahren setzen wir fort. Sollte dieses Verfahren nicht damit abbrechen, dass für einen Wert der so entstehenden Mittelpunktsfolge m_k irgendwann $f(m_k) = 0$ gilt, wodurch wir mit m_k bereits eine Nullstelle haben, so ergibt dieses Verfahren eine monoton wachsende Untergrenzenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und eine monoton fallende Obergrenzenfolge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, deren Werte beschränkt sind,

$$a \le a_n \le a_{n+1} \le b_n \le b_{n+1} \le b,$$

und für die

$$f(a_n) < 0 < f(b_n)$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

Da nun die beiden Intervallgrenzenfolgen sowohl monoton und beschränkt sind, konvergieren sie, da (als Konsequenz des Vollständigkeitsaxioms) jede beschränkt-monotone Folge konvergent ist (Kap. 4). Zudem gilt für die Längenfolge $(l_n = b_n - a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ der Teilintervalle durch die fortlaufende Halbierung $l_n = \frac{1}{2^n}(b-a) \to 0$. Daher sind die Grenzwerte der beiden Folgen (a_n) und (b_n) identisch:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n =: \xi.$$

Wegen $f(a_n) < 0 < f(b_n)$ folgt aufgrund des Satzes über die schwache Monotonie des Grenzwertes:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) \le 0 \le \lim_{n\to\infty} f(b_n).$$

Wegen der Stetigkeit von f können wir den Grenzübergang und die Funktionsauswertung innerhalb dieser Ungleichung miteinander vertauschen:

$$f(\underbrace{\lim_{n\to\infty} a_n}_{=\xi}) \leq 0 \leq f(\underbrace{\lim_{n\to\infty} b_n}_{=\xi}).$$

Es gilt somit $f(\xi) \leq 0$ und $f(\xi) \geq 0$. Damit bleibt nur $f(\xi) = 0$. Die Konvergenz der beiden Intervallgrenzenfolgen (a_n) und (b_n) konnten wir direkt mit dem Satz über die Konvergenz beschränkt-monotoner Folge begründen. Dieser Satz basiert dabei wesentlich auf dem Vollständigkeitsaxiom in $\mathbb{R}$. Für den nicht vollständigen Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen gilt die Aussage des Nullstellensatzes nicht. So hat beispielsweise die stetige Funktion $f(x) = x^2 - 2$ auf dem Intervall $[0, 2]$ vorzeichenverschiedene Randwerte $f(0) = -2$, $f(2) = 2$. In diesem Intervall existiert zwar die reelle Nullstelle $\xi = \sqrt{2}$, die jedoch nicht rational ist.

Die Intervallhalbierungsmethode kann nun dazu verwendet werden, Nullstellen stetiger Funktionen näherungsweise zu bestimmen, falls wir eine Nullstelle zwischen zwei Intervallgrenzen mit vorzeichenverschiedenen Funktionswerten nach dem Nullstellensatz eingrenzen können.

Die Intervallgrenzenfolgen konvergieren dann beide gegen dieselbe Nullstelle, sofern nicht eine der beiden Folgen bereits zuvor auf eine Nullstelle trifft. Sie können dann als Näherungsverfahren benutzt werden. Wir werden aber noch wesentlich effizientere Näherungsverfahren zur Nullstellenberechnung kennenlernen.

Aufgrund der strengen Voraussetzung $f(a)f(b) < 0$ des Nullstellensatzes ist weder a noch b eine Nullstelle von f. Daher konnten wir die Lage einer Nullstelle ξ innerhalb des offenen Intervalls (a, b) eingrenzen.

Die Aussage des Nullstellensatzes können wir sehr leicht auf Zwischenwerte verallgemeinern.

Zwischenwertsatz

Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Gilt $f(a) < m < f(b)$ oder $f(b) < m < f(a)$ für eine reelle Zahl m, so existiert eine Zwischenstelle $\xi \in (a, b)$ mit $f(\xi) = m$. In etwas abgeschwächter Form: Falls $f(a) \leq m \leq f(b)$ oder $f(b) \leq m \leq f(a)$ gilt, so gibt es ein $\xi \in [a, b]$ mit $f(\xi) = m$.

5.3 Beschränkte und monotone Funktionen

In Analogie zum Beschränktheitsbegriff bei Folgen definieren wir die Beschränktheit einer Funktion.

Definition: Beschränktheit einer Funktion

Es sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf $D \subset \mathbb{R}$. Man nennt f (nach oben bzw. nach unten) beschränkt, wenn die Wertemenge $f(D)$ (nach oben bzw. nach unten) beschränkt ist.

Beispiele

1. Die Sinusfunktion ist beschränkt, da $\sin \mathbb{R} = [-1, 1]$ eine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist.
2. Die reelle Exponentialfunktion ist nur nach unten beschränkt, da $\exp \mathbb{R} = (0, \infty)$ eine nach unten beschränkte Menge ist mit 0 als Infimum.
3. $f : [-2, 2) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ ist beschränkt, da $f([-2, 2)) = [0, 4]$ eine beschränkte Menge ist.
4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ ist nur nach unten beschränkt, denn hier ist $f(\mathbb{R}) = [0, \infty)$.
5. Die auf $D := (-\infty, 0)$ eingeschränkte Kehrwertfunktion ist nach oben beschränkt, da die Wertemenge $1/D = D$ eine nach oben beschränkte Menge ist. ◀

Eine wichtige Eigenschaft stetiger Funktionen ist, dass abgeschlossene (und damit beschränkte) Intervalle wieder auf beschränkte, abgeschlossene Intervalle abgebildet werden. Wir präzisieren dies:

Satz

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist ihre Wertemenge $f([a, b])$ ebenfalls ein abgeschlossenes und beschränktes Intervall. Insbesondere gibt es ein $x_m \in [a, b]$ sowie ein $x_M \in [a, b]$ mit $f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$ für alle $x \in [a, b]$. Hierbei bezeichnen wir $f(x_m) = \min f([a, b])$ als **Minimum** und $f(x_M) = \max f([a, b])$ als **Maximum** von f (auf $[a, b]$). Stetige Funktionen auf beschränkten, abgeschlossenen Intervallen sind also beschränkt und besitzen Minimum sowie Maximum.

Ebenfalls ähnlich wie bei Folgen definieren wir den Monotoniebegriff für reelle Funktionen.

Definition: Monotonie einer Funktion

Es sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Man nennt f

1. monoton wachsend, falls $f(x_1) \leq f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 < x_2$;
2. streng monoton wachsend, falls $f(x_1) < f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 < x_2$;
3. monoton fallend, falls $f(x_1) \geq f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 < x_2$;

4. streng monoton fallend, falls $f(x_1) > f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 < x_2$.

Für den Begriff „(streng) monoton wachsend" gibt es auch die Bezeichnung „(streng) monoton steigend".

Beispiele

1. Die Identität $\mathrm{id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x$ auf $\mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend.
2. $-\mathrm{id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto -x$ ist streng monoton fallend auf $\mathbb{R}$.
3. Die auf $\mathbb{R}_-$ eingeschränkte Kehrwertfunktion $f : \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}_-, x \mapsto \frac{1}{x}$ ist streng monoton fallend.
4. Die auf $\mathbb{R}_+$ eingeschränkte Kehrwertfunktion $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, x \mapsto \frac{1}{x}$ ist streng monoton fallend.
5. Die Kehrwertfunktion selbst $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ ist nicht monoton, da beispielsweise für $1 < 2$ gilt $f(1) > f(2)$, aber für $-1 < 1$ das Umgekehrte: $f(-1) < f(1)$. ◀

Funktionen mit strenger Monotonie haben eine vorteilhafte Eigenschaft. Diese Funktionen stellen bijektive Abbildungen von der Definitions- in die Wertemenge dar. Falls eine streng monotone Funktion f darüber hinaus auch noch stetig ist, bildet sie Intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$ auf Intervalle ab, deren Grenzen durch $f(a)$ und $f(b)$ gebildet werden.

Satz: Existenz der Umkehrfunktion

Es sei $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige und streng monoton wachsende bzw. fallende Funktion. Dann ist $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$ bzw. $f([a, b]) = [f(b), f(a)]$ und die Funktion $f : [a, b] \to [f(a), f(b)]$ bzw. $f : [a, b] \to [f(b), f(a)]$ eine bijektive Abbildung. Es existiert die Umkehrfunktion

$$f^{-1} : [f(a), f(b)] \to [a, b] \quad \text{(bei wachsender Monotonie)}$$

bzw.

$$f^{-1} : [f(b), f(a)] \to [a, b] \quad \text{(bei fallender Monotonie)}$$

mit der Eigenschaft

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x, \quad x \in [a, b]$$

und

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = x, \quad x \in f([a, b]).$$

In dieser Situation wird eine Funktion als umkehrbar bezeichnet. Dieser Satz ist in entsprechender Weise erweiterbar auf offene, halboffene und uneigentliche Intervalle.

Strenge Monotonie vererbt sich auf die Umkehrfunktion

Ist eine umkehrbare Funktion $f : [a, b] \to [f(a), f(b)]$ streng monoton wachsend, so gibt es für zwei Funktionswerte $y_1, y_2 \in [f(a), f(b)]$ mit $y_1 < y_2$ zwei eindeutig bestimmte $x_1, x_2 \in [a, b]$ mit $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$ und $x_1 < x_2$. Denn wäre $x_1 = x_2$, so wäre $f(x_1) = f(x_2)$, und wäre $x_1 > x_2$, so wäre aufgrund der streng wachsenden Monotonie $f(x_1) > f(x_2)$. Dies stellt in beiden Fällen einen Widerspruch zu $f(x_1) = y_1 < y_2 = f(x_2)$ dar.

Aus der Ungleichung $y_1 < y_2$ folgt aufgrund der streng wachsenden Monotonie schließlich $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$. Es gilt also die Implikation

$$y_1 < y_2 \Rightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$$

für alle $y_1, y_2 \in [f(a), f(b)]$. Die Umkehrfunktion ist also ebenfalls streng monoton wachsend. Eine analoge Argumentation können wir im Fall einer streng monoton fallenden Funktion durchführen. Wir stellen also fest:

Satz: Monotonie der Umkehrfunktion

Ist f eine streng monoton wachsende (bzw. fallende) Funktion, so ist auch die Umkehrfunktion f^{-1} streng monoton wachsend (bzw. fallend).

Streng monotone Funktionen lassen äquivalente Umformungen bei Ungleichungen zu

Bei einer Ungleichung $x_1 < x_2$ wirkt die Anwendung einer streng monoton wachsenden Funktion auf beiden Seiten ungleichungserhaltend, während die Anwendung einer streng monoton fallenden Funktion auf beiden Seiten ungleichungsumkehrend wirkt.

Umformung einer Ungleichung

1. Ist f streng monoton wachsend, so gilt

$$\begin{aligned} & x_1 < x_2 \quad \mid \ f(\cdots) \\ \iff \ & f(x_1) < f(x_2). \end{aligned}$$

2. Ist f streng monoton fallend, so gilt

$$\begin{aligned} & x_1 < x_2 \quad \mid \ f(\cdots) \\ \iff \ & f(x_1) > f(x_2). \end{aligned}$$

Wie gelangt man nur zur Umkehrfunktion einer auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ definierten streng monotonen und stetigen Funktion

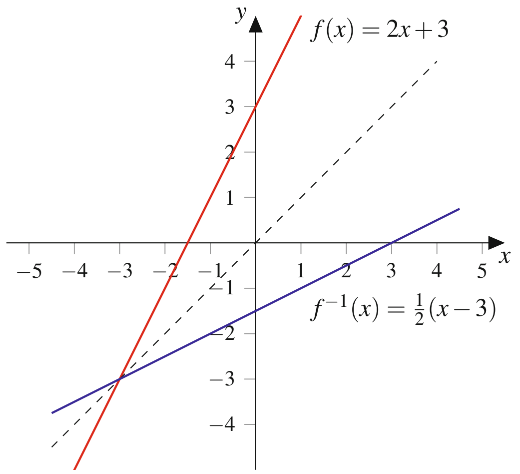

Abb. 5.1 Funktion und Umkehrfunktion

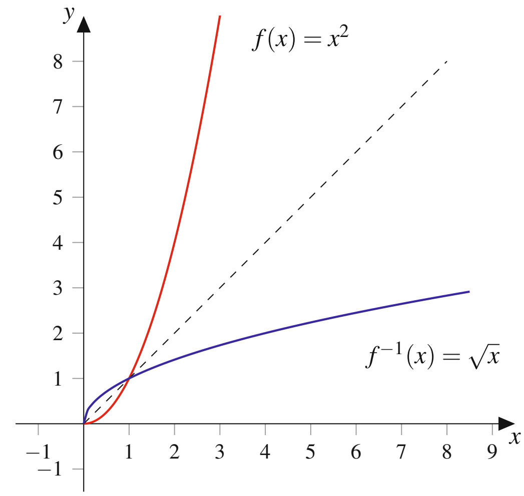

Abb. 5.2 Funktion und Umkehrfunktion für $f(x) = x^2, x \geq 0$

$f : I \to f(I)$? Zunächst ordnet f jedem $x \in I$ bijektiv ein $y \in f(I)$ zu. Für ein gegebenes $y \in f(I)$ gibt es daher genau ein $x \in I$ mit $y = f(x)$. Wenn es gelingt, diese Gleichung nach x aufzulösen, dann ergibt der entstehende Term die Umkehrfunktion:

$$y = f(x) \iff f^{-1}(y) = x.$$

Wenn wir die Umkehrfunktion in derselben Variablen x ausdrücken möchten, so tauschen wir einfach die Bezeichnungen aus. Dann ist mit $f^{-1} : f(I) \to I, x \mapsto f^{-1}(x)$ die Umkehrfunktion von f gegeben. Durch den Variablentausch $x \leftrightarrow y$ wird deutlich, dass der Graph von f^{-1} aus dem Graphen von f durch Achsentausch hervorgeht, was einer Spiegelung des Graphen von f an der Winkelhalbierenden, also dem Graphen von $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$, entspricht.

Wir sehen uns dies am Beispiel der linearen Funktion $f : [0,1] \to [3,5]$ mit $f(x) = 2x + 3$ einmal an. Diese Funktion ist stetig und streng monoton wachsend. Ihre Wertemenge ist in der Tat $f([0,1]) = [f(0), f(1)] = [3,5]$. Aus dem Ansatz $y = f(x)$ folgt $x = \frac{1}{2}(y-3)$. Nach Variablenumbenennung folgt für die Umkehrfunktion: $f^{-1} : [3,5] \to [0,1], f(x) = \frac{1}{2}(x-3)$. Des Weiteren gilt $(f^{-1} \circ f)(x) = \frac{1}{2}((2x+3)-3) = x$. Beide Graphen sind symmetrisch zum Graphen der Identität (Abb. 5.1). Die strenge Monotonie auf der Definitionsmenge ist zwar hinreichend für die Existenz der Umkehrfunktion, aber nicht notwendig, wie das Beispiel der Kehrwertfunktion $k(x) : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, $k(x) = \frac{1}{x}$ zeigt. Auf $\mathbb{R}^*$ ist k zwar nicht monoton (Die Kehrwertfunktion ist streng monoton fallend auf $(-\infty, 0)$ und auf $(0, \infty)$ aber nicht auf ganz $\mathbb{R}^*$, da beispielsweise $k(-1) < k(1)$ gilt, obwohl $-1 < 1$ ist); sie ist dennoch umkehrbar: Der Ansatz $y = \frac{1}{x}$ führt zu $x = \frac{1}{y}$. Nach Variablentausch erhalten wir wieder die Kehrwertfunktion, die damit ihre eigene Umkehrfunktion auf $\mathbb{R}^*$ ist.

Gelegentlich können wir durch Einschränkung der Definitionsmenge eine nicht umkehrbare Funktion zu einer umkehrbaren Funktion umgestalten. So ist beispielsweise die die quadratische Normalparabel $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ nicht umkehrbar, da bereits wegen $f(-1) = 1 = f(1)$ keine Injektivität von f auf ganz $\mathbb{R}$ vorliegt. Die Normalparabel ist streng monoton fallend für $x \leq 0$ und streng monoton wachsend für $x \geq 0$. Es gibt also Bereiche, in denen diese Funktion ein eindeutiges strenges Monotonieverhalten hat. Schränkt man f auf $(-\infty, 0]$ oder auf $[0, \infty)$ ein, so erhält man eine streng monoton fallende bzw. eine streng monoton steigende Funktion. Auf diesen Teilbereichen ist f also umkehrbar. Ist für $x \in [0, \infty)$ ein Funktionswert $y = f(x) = x^2$ vorgegeben, so stellen wir zur Bestimmung von f^{-1} die Gleichung $y = x^2$ nach x um. Da $x \in [0, \infty)$ vorausgesetzt ist, ergibt sich die eindeutige Lösung $x = \sqrt{y}$. Wir ersetzen wieder y durch x und schreiben $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ als Umkehrfunktion der für $x \geq 0$ eingeschränkten Funktion f (Abb. 5.2). Es ist daher gelegentlich sinnvoll, Funktionen nur auf eingeschränkten Bereichen ihrer ursprünglichen Definitionsmenge zu betrachten. Wir definieren, nicht nur zu diesem Zweck, die Einschränkung einer Funktion.

Definition: Einschränkung einer Funktion

Es sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine auf einer Menge $D \subset \mathbb{R}$ definierte Funktion. Betrachtet man die Funktion nur eingeschränkt auf eine Teilmenge $T \subset D$ ihres ursprünglichen Definitionsbereichs D, so wird dies durch die Bezeichnung $f|_T$ (sprich: „f eingeschränkt auf T") zum Ausdruck gebracht. Es liegt dann eine formal neue Abbildung vor,

$$f|_T : T \to \mathbb{R},$$

für deren Wertemenge $f|_T(T) \subset f(D) \subset \mathbb{R}$ gilt.

Noch drastischer stellt sich die Situation beim Sinus, Kosinus und Tangens dar. Auf ihren Definitionsbereichen sind diese Funktionen bedingt durch ihre Periodizität „im höchsten Grade" nicht injektiv bzw. nicht monoton. Es gibt aber lokale Bereiche, in denen bei diesen Funktionen jeweils strenge

Monotonie vorliegt. So ist beispielsweise der Sinus in dem Intervall $[-\pi/2, \pi/2]$ streng monoton wachsend. Dort existiert die Umkehrfunktion des Sinus. Wir diskutieren diese lokalen Umkehrungen in Kap. 6.

Elementare Eigenschaften von Umkehrfunktionen

Es bezeichne f^{-1} die Umkehrfunktion einer Funktion f. Dann gilt offenbar:

- Der Graph $\Gamma_{f^{-1}}$ der Umkehrfunktion ergibt sich aus der Spiegelung des Graphen Γ_f der Ausgangsfunktion an der Winkelhalbierenden $y = x$, dem Graphen der Identität auf $\mathbb{R}$.
- Es gibt Funktionen, die ihre eigene Umkehrfunktion sind, z. B. $f(x) = \frac{1}{x-K} + K$ oder $f(x) = K - x$ mit einer beliebigen Konstanten $K \in \mathbb{R}$ oder die Identität $f(x) = x$.

Die Verkettung zweier einheitlich monotoner Funktionen führt stets zu einer streng monoton wachsenden Funktion. Bei einer Mischsituation ergibt sich eine streng monoton fallende Funktion.

Satz

Die Komposition von zwei streng monoton wachsenden Funktionen oder zwei streng monoton fallenden Funktionen ist eine streng monoton wachsende Funktion. Die Verkettung einer streng monoton wachsenden mit einer streng monoton fallenden Funktion ist eine streng monoton fallende Funktion.

Wie das Monotonieverhalten vererbt sich auch die Stetigkeit auf die Umkehrfunktion:

Satz: Stetigkeit der Umkehrfunktion

Es sei $f : D \to f(D)$ eine auf $D \subset \mathbb{R}$ stetige und umkehrbare Funktion. Ihre Umkehrfunktion $f^{-1} : f(D) \to D$ ist auf $f(D)$ stetig.

Die Beweise der beiden vorausgegangenen Sätze seien als Übung empfohlen.

5.4 Natürlicher Logarithmus und allgemeine Exponentialfunktion

Der Graph der Exponentialfunktion illustriert ihr Monotonieverhalten. Wir wollen rechnerisch zeigen, dass in der Tat die Exponentialfunktion streng monoton wächst. Zu diesem Zweck seien $x, y > 0$ zunächst zwei positive Zahlen mit $x < y$. Es gilt nun

$$\begin{aligned}\exp(x) - \exp(y) &= \exp(x) - \exp(x + y - x)\\ &= \exp(x) - \exp(x)\exp(y - x)\\ &= \exp(x)(1 - \exp(y - x)).\end{aligned} \tag{5.1}$$

Da $y - x > 0$ ist, gilt

$$\exp(y - x) = 1 + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(y-x)^k}{k!}}_{>0} > 1.$$

Zusammen mit (5.1) folgt hieraus

$$\exp(x) - \exp(y) = \underbrace{\exp(x)}_{>0}\,\underbrace{(1 - \exp(y - x))}_{<0} < 0$$

bzw. nach Addition von $\exp(y)$

$$\exp(x) < \exp(y).$$

Sind dagegen $x < y < 0$, so gilt $0 < -y < -x$ und daher nach obiger Argumentation

$$\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)} < \frac{1}{\exp(-y)} = \exp(y),$$

sodass auch für negative x, y mit $x < y$ gilt: $\exp(x) < \exp(y)$. Die Exponentialfunktion ist also eine streng monoton wachsende, stetige Funktion. Damit ist sie umkehrbar.

Definition: Natürliche Logarithmusfunktion

Die reelle Exponentialfunktion

$$\exp : \mathbb{R} \to \exp \mathbb{R} = \mathbb{R}_+$$

ist streng monoton wachsend. Die Umkehrfunktion existiert daher und heißt natürlicher Logarithmus:

$$\ln : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}.$$

Da sich die Monotonieeigenschaft einer streng monotonen Funktion auf die Umkehrfunktion vererbt, ist auch der natürliche Logarithmus, wie die Exponentialfunktion, streng monoton wachsend. Aus den Beziehungen $\exp(0) = 1$ und $\exp(1) = \mathrm{e}$ folgt nach Logarithmieren beider Seiten $0 = \ln 1$ und $1 = \ln \mathrm{e}$. Der Logarithmus hat also genau eine Nullstelle, nämlich $x = 1$. Der Graph des Logarithmus ist die Spiegelung des Graphen der Exponentialfunktion an der Winkelhalbierenden $y = x$. Abb. 5.3 zeigt den Graphen der Exponentialfunktion und den des natürlichen Logarithmus.

Wegen

$$\lim_{x\to-\infty} \exp x = 0^+, \quad \lim_{x\to\infty} \exp x = \infty$$

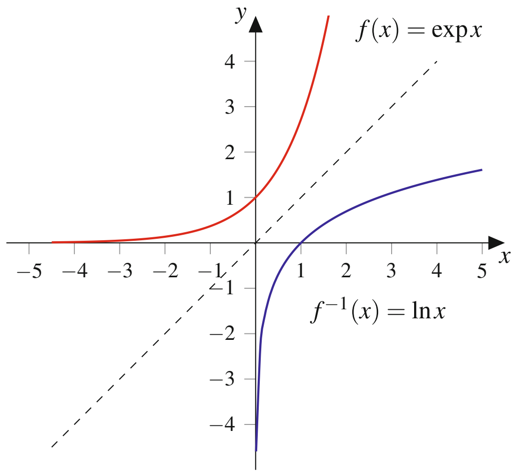

Abb. 5.3 Die Exponential- und die Logarithmusfunktion

folgt

$$\lim_{x\searrow 0} \ln x = -\infty, \qquad \lim_{x\to\infty} \ln x = \infty.$$

Ähnlich wie bei der Exponentialfunktion gilt für die Logarithmusfunktion eine Funktionalgleichung.

Satz: Funktionalgleichung des Logarithmus

Für $x, y > 0$ gilt

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y.$$

Beweis Es seien $x, y > 0$. Es gibt nun $a, b \in \mathbb{R}$ mit $x = \exp a$ und $y = \exp b$, wobei $a = \ln x$ und $b = \ln y$ ist.

Ausgehend von der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion

$$\exp(a + b) = \exp(a)\exp(b) = xy$$

folgt nach Anwendung des Logarithmus auf beiden Seiten

$$a + b = \ln(xy).$$

Da $a = \ln x$ und $b = \ln y$ gilt, folgt hieraus $\ln x + \ln y = \ln(xy)$. ■

Durch Hintereinanderausführung heben sich Exponential- und Logarithmusfunktion wieder gegenseitig auf. Es gilt also

$$\begin{aligned} \ln(\exp x) &= x \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}, \\ \exp(\ln x) &= x \quad \text{für alle} \quad x > 0. \end{aligned}$$

Die Funktionalgleichung des Logarithmus stellt das Prinzip des Rechenschiebers dar. Indem die Logarithmen zweier Zahlen addiert werden (durch Verschieben der Skala), kann der Logarithmus des Produkts dieser beiden Zahlen bestimmt werden.

Aus der Funktionalgleichung folgt außerdem für $n \in \mathbb{N}_0$ und $x > 0$

$$\ln(x^n) = \ln(\underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n \text{ mal}}) = \ln \prod_{k=1}^{n} x = \sum_{k=1}^{n} \ln x = n \ln x.$$

Zusätzlich folgt für $x > 0$

$$x^{-1} = \frac{1}{x} = \frac{1}{\exp(\ln x)} = \exp(-\ln x).$$

Hieraus ergibt sich nach Anwendung des Logarithmus auf beiden Seiten

$$\ln(x^{-1}) = -\ln x.$$

Insgesamt ergibt dies für $x > 0$

$$\ln(x^n) = n \ln x \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Achtung Da bei gradzahligem Exponenten n die Potenz x^n für alle $x \in \mathbb{R}$ niemals negativ wird, gilt sogar für alle $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$\ln(x^n) = n \ln |x|, \qquad n \in 2\mathbb{Z}.$$

Hierbei ist es wichtig, die Betragsstriche zu setzen. ◀

Beispielsweise ist der Ausdruck $\ln(x + 1)^2$ für alle reellen $x \neq -1$ definiert. Es gilt dabei

$$\ln(x + 1)^2 = 2 \ln |x + 1|.$$

Durch Umskalieren des Arguments der Exponentialfunktion kann die allgemeine Potenz definiert werden

Basierend auf der Exponential- und Logarithmusfunktion definieren wir nun die allgemeine Potenz.

Definition: Allgemeine Potenz

Es sei $a > 0$. Die allgemeine Potenz a^b zur Basis $a > 0$ und Exponenten $b \in \mathbb{R}$ wird definiert als

$$a^b := \exp(b \cdot \ln a).$$

Die allgemeine Potenz zur Basis a definiert damit die allgemeine Exponentialfunktion zur Basis a:

$$\begin{aligned} \exp_a : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto a^x := \exp(x \cdot \ln a). \end{aligned}$$

Das Argument x wird also mit dem Faktor $\ln a$ umskaliert. Für ganzzahliges b ist die allgemeine Potenz verträglich mit der üblichen Definition der Potenz als b-fache Multiplikation der Basis a für $b \geq 0$ bzw. als Kehrwert der $|b|$-fachen Multiplikation der

Teil II

Basis a, wenn $b < 0$ ist. Zudem wird deutlich, dass sich die Quadratwurzel als Potenz mit dem Exponenten $\frac{1}{2}$ schreiben lässt:

$$\begin{aligned} y^2 = x &\iff \exp(2\ln y) = x \\ &\iff 2\ln y = \ln x \\ &\iff \ln y = \tfrac{1}{2}\ln x \\ &\iff y = x^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Somit ist für $x > 0$

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}},$$

was wir durch $0^{\frac{1}{2}} := 0$ für $x = 0$ stetig fortsetzen können. In obiger Definition der allgemeinen Potenz muss die Basis a eine positive Zahl sein. Wie könnte man auch für negative Basen eine allgemeine Exponentialfunktion definieren? In der obigen Definition muss a positiv sein, damit a im Definitionsbereich des Logarithmus liegt. Wir wissen, dass beispielsweise für $a = -1$ jede Potenz der Art $(-1)^n$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ definiert ist. Aber was könnte etwa $(-1)^\pi$ sein? Aus der Polardarstellung komplexer Zahlen ist bekannt, dass $-1 = \exp(\pi \cdot i)$ ist. Daher können wir $(-1)^x$ definieren als

$$(-1)^x := (\exp(\pi i))^x = \exp(\pi i x) \in \mathbb{C}.$$

Wir verlassen damit die reelle Analysis. Die komplexe Analysis ist Gegenstand der Funktionentheorie, die wir hier nicht weiter verfolgen.

Die Definition der allgemeinen Potenz ist in der Tat verträglich mit der ganzzahligen Potenz, denn es gilt für $a > 0$:

$$a^n = \prod_{k=1}^{n} a = \prod_{k=1}^{n} \exp(\ln a) = \exp\left(\sum_{k=1}^{n} \ln a\right) = \exp(n \cdot \ln a).$$

Abschließend verallgemeinern wir den Logarithmus auf beliebige positive Basen.

Definition: Allgemeiner Logarithmus

Der allgemeine Logarithmus zur Basis $a > 0$, $a \neq 1$ löst die Gleichung

$$a^x = y \qquad \text{für} \quad y > 0.$$

Der allgemeine Logarithmus zur Basis a trägt die Bezeichnung

$$x = \log_a y.$$

Dabei gilt

$$\log_a y = \frac{\ln y}{\ln a}.$$

Wir erkennen dies sehr schnell durch die beidseitige Anwendung des natürlichen Logarithmus auf

$$a^x = \exp(x \ln a) = y.$$

Nach Logarithmieren folgt

$$x \ln a = \ln y.$$

Da $a \neq 1$ ist, gilt $\ln a \neq 0$, und es folgt

$$x = \frac{\ln y}{\ln a}.$$

Für die speziellen Basen $a = 2$ und $a = 10$ gibt es folgende Bezeichnungen:

- $\lg x = \log_{10} x$: dekadischer Logarithmus
- $\operatorname{ld} x = \log_2 x$: binärer Logarithmus.

Aufgaben

5.1 Skizzieren Sie die Graphen der folgenden Funktionen:

a) $f : [-5,5] \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{(x-1)^2}$

b) $f : [-6,2] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{(x+2)^2}{2} - 4$

c) $f : [-3,3] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{3}{2}(x + \frac{1}{3}) + \frac{1}{2}$

d) $f : [-3,4] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{2}{\sqrt{(x-1)^{10}+1}}$

5.2 Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-1/x^2})$

b) $\lim\limits_{x\nearrow 0} \mathrm{e}^{-1/x}$, sowie $\lim\limits_{x\searrow 0} \mathrm{e}^{-1/x}$

c) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{\tan(1-x)}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \cos\frac{1}{x} + \exp(-x^2 + x)$

e) $\lim\limits_{x\nearrow 1} \frac{1}{x-1}$ sowie $\lim\limits_{x\searrow 1} \frac{1}{x-1}$

f) $\lim\limits_{x\nearrow 1} \frac{1-x}{\sqrt{x^2-2x+1}}$ sowie $\lim\limits_{x\searrow 1} \frac{1-x}{\sqrt{x^2-2x+1}}$

g) $\lim\limits_{x\nearrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{|\tan x|}$ sowie $\lim\limits_{x\searrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{|\tan x|}$

5.3 Untersuchen Sie auf Monotonie:

a) $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = x(1-x^2)$

b) $f : (0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = x + \frac{1}{x}$

c) $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = x + \frac{1}{x}$

d) $f : [0,\pi] \to [-1,1], f(x) = x \mapsto \cos x$

e) $f : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = \sin x \cos x (\tan x + \frac{1}{\tan x})$
(Hinweis: Genau hinsehen! Wie ist der Tangens definiert?)

f) $f : (-\infty,0] \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = \exp(x^2)$

5.4 Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Umkehrbarkeit und bestimmen Sie ggf. die zugehörige Umkehrfunktion. Geben Sie in diesen Fällen den Definitionsbereich von f^{-1} an.

a) $f : [a, b] \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$, wobei $0 < a < b < \infty$

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = (\frac{1}{2}x - 4)^3 + 2$

c) $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - 3$

d) $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$

e) $f : \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = \frac{x}{x-1}$

f) $f : \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = \exp(x^2)$

g) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 2^x$

5.5 Bei einer festen Geldanlage mit einem prozentualen Zinssatz $z \in (0, 100]$ erhöht sich das angelegte Kapital K_0 nach einem Jahr um den Wert $K_0 \cdot \frac{z}{100}$.

a) Wie lautet die Folge K_n, die das Gesamtkapital nach n Jahren angibt?

b) Wie muss der Zinssatz z lauten, damit das Kapital sich nach einem bzw. nach zwei Jahren verdoppelt hat?

c) Nach wie vielen Jahren hat sich in Abhängigkeit vom Zinssatz z das Anfangskapital verdoppelt, verdreifacht bzw. verzehnfacht? Wie viele Jahre sind hierzu jeweils bei einem Zinssatz von 5 % notwendig?

5.6 Die Messung zur Ermittlung der Kennlinie einer Messgröße y in Abhängigkeit von einer weiteren Messgröße x ergebe folgende Messwerttabelle:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	0.5	4.0	13.5	32.0	62.5	108.0	171.5	256.0	364.5

Wir vermuten einen polynomiellen Zusammenhang zwischen beiden Messgrößen der Form $y(x) = Ax^n$. Ermitteln Sie die Parameter $A \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{Z}$. Hierzu stellen Sie Logarithmen von x und y (beispielsweise die natürlichen Logarithmen $\ln x$ und $\ln y$) in einem Diagramm dar. Welche Form müsste der resultierende Graph des Zusammenhangs $\ln x \mapsto \ln y$ haben, wenn der vermutete Zusammenhang $y(x) = Ax^n$ stimmt? Ermitteln Sie dann aus dem Ordinatenachsenabschnitt (Schnitthöhe des resultierenden Graphen mit der senkrechten Koordinatenachse) und der Steigung des Graphen die beiden gesuchten Parameter.

Differenzialrechnung einer Variablen

6

Was ist ein Differenzialquotient?

Wann ist eine Funktion differenzierbar?

Wodurch ist die Ableitung einer Funktion definiert?

Teil II

L. Göllmann et al., *Mathematik für Ingenieure: Verstehen – Rechnen – Anwenden*, DOI 10.1007/978-3-662-53867-8_6